

Θέμα 1. (2,5 μον.)

Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, \rho)$ όπου ρ είναι η συνήθης μετρική και το σύνολο $E = [0, 3) \cup \{5\} \cup (8, 9]$. Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα με πλήρη αιτιολόγηση.

α) Να βρείτε την κλειστή θήκη, το εσωτερικό, το παράγωγο σύνολο και το σύνορο του E .

β) Ποιες είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του μετρικού χώρου (E, ρ_E) ;

γ) Να βρείτε όλα τα υποσύνολα του E που είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του E ως προς τη σχετική μετρική.

Θέμα 2. (3 μον.)

Να εξετάσετε αν καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής, με πλήρη αιτιολόγηση (δηλ. απόδειξη στην περίπτωση που είναι αληθής και κατάλληλο αντιπαράδειγμα στην περίπτωση που είναι ψευδής).

(Α) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και $x, y \in X$ με $x \neq y$ τότε υπάρχουν δυο ανοικτά υποσύνολα U, V του X με $x \in U$, $y \in V$ και $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

(Β) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και A, B είναι δυο μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X με $A \cap B = \emptyset$ τότε υπάρχουν δυο κλειστά υποσύνολα K, L του X ώστε $A \subseteq K$, $B \subseteq L$ και $K \cap L = \emptyset$.

(Γ) Αν (X, ρ) είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος, (Y, d) είναι ένας μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow Y$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του Y το $f^{-1}(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X .

Θέμα 3. (3 μον.)

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος.

α) Αν D είναι ένα υποσύνολο του X , να δείξετε ότι το D είναι πυκνό αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X με $G \neq \emptyset$ ισχύει $D \cap G \neq \emptyset$.

β) Αν $n \in \mathbb{N}$ και $(G_i)_{i=1}^n$ είναι ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X να δείξετε ότι το σύνολο $\bigcap_{i=1}^n G_i$ είναι πυκνό υποσύνολο του X .

γ) Αν ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X να δείξετε ότι το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X .

Θέμα 4. (1,5 μον.)

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και A, B δυο μη κενά υποσύνολα του X ώστε το A να είναι συμπαγές, το B να είναι κλειστό και να ισχύει $A \cap B = \emptyset$. Να δείξετε $\rho(A, B) > 0$.

Καλή Επιτυχία!